Vektorenrechnung und Lagebeziehungen

Erläuterung:
Punkt: hat feste Koordinaten in einem Koordinatensystem; kann nicht verändert werden
Vektor: ist eine Art Handlungsanweisung, die angibt wie viele Einheiten nach links, rechts und oben man gehen muss; hat keine festen Koordinaten, weil Start- und Endpunkt von der Aufgabenstellung variieren

Lineare Abhängigkeit von zwei Vektoren bestimmen:
Wenn 2 Vektoren das Vielfache von einander sind, sind sie linear abhängig.

Allgemeine Formel einer Geraden:
[x1;y1;z1]+λ [x2;y2;z2]

Allgemeine Formel einer Ebene:
[x1;y1;z1]+ λ [x2;y2;z2]+ μ [x3;y3;z3]

Beziehung berechnen zwischen Punkt P – Gerade g:
gleichsetzen mit dem TR:
[x1;y1;z1]+ λ [x2;y2;z2]=[x3;y3;z3]
a) TR „false“→ P liegt nicht auf g
b) TR „λ = Zahl“→ P liegt auf g

Beziehung berechnen zwischen Punkt P – Ebene E:
gleichsetzen mit dem TR:
[x1;y1;z1]+ λ [x2;y2;z2]+ μ [x3;y3;z3] =[x4;y4;z4]
a) TR „false“→ P liegt nicht auf E
b) TR „λ = Zahl1 and μ = Zahl2“→ P liegt auf E

Beziehung berechnen zwischen Gerade g – Gerade h:
gleichsetzen mit dem TR**:**
[x1;y1;z1]+ λ1 [x2;y2;z2] = [x3;y3;z3]+ λ2 [x4;y4;z4]
a) TR Beziehung zwischen λ1 und λ2: g = h
b) TR „false“: g und h windschief oder g parallel h
Wenn die beiden Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, sind g und h parallel und sonst windschief
c) TR „λ1 = Zahl1, λ2 = Zahl2“, g und h schneiden sich, λ1 in g oder λ2 in h einsetzen liefert den Schnittpunkt

Beziehung berechnen zwischen Gerade g – Ebene E:
gleichsetzen mit dem TR:
[x1;y1;z1]+ λ1 [x2;y2;z2] = [x3;y3;z3]+ λ2 [x4;y4;z4]+my [x5;y5;z5]
a) TR „λ1 = Zahl1, λ2 = Zahl2, μ = Zahl3“, g und E schneiden sich, λ1 in g oder λ2 und μ in E einsetzen liefert den Schnittpunkt
b) TR „false“: g und E parallel
c) TR „Zusammenhang zwischen λ1, λ2 und μ“: g liegt in E

Beziehung berechnen zwischen Ebene E1 – Ebene E2:
Gleichsetzen mit dem TR:

a) TR false : Die Ebenen sind parallel
b) TR: Beziehung zwischen den Variablen, die von zwei Variablen abhängen: Ebenen sind identisch
c) TR: Beziehung zwischen den Variablen, die von einer Variablen abhängt: Ebenen schneidensich.

Beispiel zur Berechnung der Schnittgerade:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Löse ($\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$,{x,y,z,t})

Liefert:
t = 3(@1-1)/2
x = (@1+1)/2
y = -(@1+1)/2
z = @1

Es gibt offensichtlich eine Schnittgerade, da die vier Variablen nur von einer Variablen (@1 = z) abhängen.
Um die Schnittgerade zu finden, ersetzt man nun in Gerade 2 t durch 3(z-1)/2:

$$\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+3(z-1)/2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+3/2z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+(-3/2)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Man löst den Ausdruck, den man für t eingesetzt hat auf

$=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\3/2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-3/2\end{pmatrix}$ Man fasst die Vektoren mit den Vorfaktoren zusammen

$=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-3/2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\3/2\end{pmatrix}$ Man fasst die Vektoren mit und die Vektoren ohne Variable zusammen

$=\begin{pmatrix}0\\1\\3/2\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\1\\3/2\end{pmatrix}$